UFABC

Lista N° 2: Teoria de Conjuntos

Bases Matemáticas

1. Escreva os seguintes conjuntos por extensão:

   (a) o conjunto dos múltiplos de 3, entre -10 e $+10$;

   (b) o conjunto dos divisores de 42;

   (c) o conjunto dos múltiplos de 0;

   (d) o conjunto das frações com numerador e denominador compreendidos entre 0 e 3.

2. Descreva os seguintes conjuntos por meio de uma propriedade dos elementos:

   (a) $A = \{+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6\}$;

   (b) $B = \{0, -10, -20, -30, -40, \ldots\}$;

   (c) $C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$;

3. Classifique os conjuntos a seguir como vazios, unitários, caso forem.

   (a) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 9/4 \,\&\, x > 6/5\}$;

   (b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \cdot x = 2\}$;

   (c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 3\}$;

   (d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 = 7\}$;

   (e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \cdot x = x\}$;

   (f) $F = \{x \in \mathbb{Q} | x > 9/4 \,\&\, x < 6/5\}$;

   (g) $G = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é divisor de zero$\}$;

   (h) $H = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é divisível por zero$\}$.

4. Construa $\mathcal{P}(A)$ se $A = \{a, b, c, d, e\}$.

5. Demonstre que se um conjunto, A, tem n elementos, então seu conjunto potência, $\mathcal{P}(A)$, tem 2^n elementos. ***Dica:*** Use o método de indução.

6. Determine o conjunto X tal que $\{a, b, c, d\} \cup X = \{a, b, c, d, e\}$, $\{c, d\} \cup X = \{a, c, d, e\}$ e $\{b, c, d\} \cap X = \{c\}$.

7. Sabe-se que $A \cup B \cup C = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 10\}$, $A \cap B = \{2, 3, 8\}$, $A \cap C = \{2, 7\}$, $B \cap C = \{2, 5, 6\}$ e $A \cup B = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 8\}$. Determine C.

8. Sejam os conjuntos A com 2 elementos, B com 3 elementos e C com 4 elementos. Qual é o número máximo de elementos de $(A \cap B) \cap C$?

9. Seja $E = \{a, \{a\}\}$. Diga qual das proposições abaixo são verdadeiras.

   (a) $a \in E$; (c) $a \subset E$; (e) $\varnothing \in E$;

   (b) $\{a\} \in E$; (d) $\{a\} \subset E$; (f) $\varnothing \subset E$.

10. Sejam A e B dois conjuntos finitos. Prove que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. O símbolo $n(X)$ representa o número de elementos do conjunto X.

11. Dados A e B conjuntos tais que $n(A) = 4$, $n(B) = 5$ e $n(A \cap B) = 3$, determine o número de subconjuntos de $A \cup B$.

12. Sendo A, B e C conjuntos finitos, use o exercício anterior para estabelece uma fórmula para calcular $n(A \cup B \cup C)$.

13. Se $A = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é divisor de } 120\}$, quantos elementos tem $A \cap B$?

14. Em uma escola que tem 415 alunos, 221 estudam inglês, 163 estudam francês e 52 estudam ambas as línguas. Quantos alunos estudam inglês ou francês Quantos alunos não estudam nenhuma das duas?

15. Sabendo que A e B são subconjuntos do conjunto universo, U, $A^{\mathcal{C}} = \{e, f, g, h, i\}$, $A \cap B = \{c, d\}$ e $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$. Quantos elementos tem A? E B?

16. Dados dois conjuntos A e B, chama-se ***diferença simétrica*** de A com B o conjunto $A\triangle B$ tal que:

$$A\triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

(a) Determine $\{a, b, c, d\}\triangle\{c, d, e, f, g\}$.

(b) Prove que $A\triangle\emptyset = A$, para todo A.

(c) Prove que $A\triangle A = \emptyset$, para todo A.

(d) Prove que $A\triangle B = B\triangle A$, para A e B quaisquer.

17. Demonstre as propriedades a seguir para união e intersecção de conjuntos:

(a) $A \cup A = A$,

(b) $A \cap A = A$,

(c) $A \cup \emptyset = A$,

(d) $A \cap \emptyset = \emptyset$,

(e) $A \cap B \subset A$,

(f) $A \cap B \subset B$,

(g) $A \cap B \subset A \cup B$,

(h) $A \cup (A \cap B) = A$,

(i) $A \cap (A \cup B) = A$,

(j) $A \cup \big(B \cap C\big) = \big(A \cup B\big) \cap \big(A \cup C\big)$,

(k) $A \cap \big(B \cup C\big) = \big(A \cap B\big) \cup \big(A \cap C\big)$.

18. Demonstre as propriedades a seguir para a diferença e complementar de conjuntos:

(a) $A \setminus A = \emptyset$,

(b) $A \setminus \emptyset = A$,

(c) $\emptyset \setminus A = \emptyset$,

(d) $\emptyset^{\mathcal{C}} = \mathbb{U}$,

(e) $\mathbb{U}^{\mathcal{C}} = \emptyset$,

(f) $\big(A^{\mathcal{C}}\big)^{\mathcal{C}} = A$,

(g) $A \cup A^{\mathcal{C}} = \mathbb{U}$,

(h) $A \cap A^{\mathcal{C}} = \emptyset$,

(i) $\big(A \cup B\big)^{\mathcal{C}} = A^{\mathcal{C}} \cap B^{\mathcal{C}}$,

(j) $\big(A \cap B\big)^{\mathcal{C}} = A^{\mathcal{C}} \cup B^{\mathcal{C}}$,

(k) $C \setminus \big(A \cap B\big) = \big(C \setminus A\big) \cup \big(C \setminus B\big)$,

(l) $C \setminus \big(A \cup B\big) = \big(C \setminus A\big) \cap \big(C \setminus B\big)$.

19. Dados os conjuntos

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n = \frac{k^2 - 1}{2},\ k \in \mathbb{N} \right\},$$
$$B = \{ n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 8n \},$$
$$C = \{ n \in \mathbb{N} \mid n^2 - 32n + 192 = 0 \}.$$

Calcular $\big(B - A\big) \cap C$.

20. Sejam os conjuntos

$$M_2 = \{2,\ 4,\ 6,\ 8, \ldots\},$$
$$M_3 = \{3,\ 6,\ 9,\ 12, \ldots\},$$
$$\vdots$$
$$M_n = \{n,\ 2n,\ 3n,\ 4n, \ldots\}.$$

Calcule: (a) $M_2 \cap M_3$, (b) $M_7 \cap M_8$, (c) $M_2 \cap M_3 \cap M_6$.

21. Seja o conjunto universo $\mathbb{U} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$. Sejam também os conjuntos $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{U} \mid (x-2)^2(x-3) = 0\}$ e $C = \{x \in \mathbb{U} \mid x \text{ é par}\}$. Calcule

(a) $A \cup B$, (c) $C \cup A^{\mathcal{C}}$, (e) $A^{\mathcal{C}} \cap C^{\mathcal{C}}$,

(b) $A \cap (B \cup C)$, (d) $(A \cup C)^{\mathcal{C}}$, (f) $\mathcal{P}(B)$.

22. Faça um diagrama de Venn que simbolize a situação seguinte: A, B, C e D são conjuntos não vazios, $D \subset C \subset B \subset A$.

23. Faça um diagrama de Venn e represente as seguintes operações entre conjuntos.

(a) $A \cap B \cap C$; (b) $A \cap (B \cup C)$; (c) $A \cup (B \cap C)$; (d) $A \cup B \cup C$.

24. Faça um diagrama de Venn e represente as seguintes operações entre conjuntos.

    (a) $A^{\mathcal{C}} - B$; (c) $A \cup B^{\mathcal{C}}$; (e) $(A \cap B)^{\mathcal{C}}$;

    (b) $A^{\mathcal{C}} - (A \cup B)$; (d) $(A \cup B)^{\mathcal{C}}$; (f) $B^{\mathcal{C}} \cap A$.

    Observação: Lembre que $A^{\mathcal{C}}$ é o complementar de A.

25. Use os diagramas de Venn-Euler para representar as seguintes operações entre conjuntos:

    (a) $C - [(A - B) \cap (B - A)]$,

    (b) $C - [(A - B) \cup (B - A)]$,

    (c) $\left[C \cap (A - B)^{\mathcal{C}}\right] \cap (B - A)$,

    (d) $\left[C \cap (B - A)^{\mathcal{C}}\right] \cap (A - B)$,

    (e) $[B - (A \cap C)] \cup [(A \cap C) - B]$,

    (f) $[(B - A) \cap (B - C)] \cup [(A \cap C) - B]$,

    (g) $\left[B^{\mathcal{C}} \cap (A \cap C)\right] \cup [(B - A) \cap (B - C)]$,

    (h) $(A - B - C) \cup (B - A - C) \cup (C - A - B) \cup (A \cap B \cap C)$.